

1. Aufgabe

Bestimmen Sie den Vektor \overrightarrow{PQ} , der die Verschiebung vom Punkt P nach Q beschreibt.

$$P(-1|7| - 4), \quad Q(1|7| - 1)$$

2. Aufgabe

Der Vektor \vec{v} verschiebt den Punkt P nach P' .

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad P(2|3| - 1)$$

Bestimmen Sie die Koordinaten von P' .

3. Aufgabe

Bestimmen Sie die Länge des Vektors \overrightarrow{PQ} .

$$P(2|-1|4), \quad Q(-1|3| - 1)$$

4. Aufgabe

Bestimmen Sie die fehlende Koordinate q_3 so, dass der Vektor \overrightarrow{PQ} die Länge $d = 5$ hat.

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

5. Aufgabe

Der 57 km lange Gotthard Basistunnel (Gotthardtunnel / 2. Röhre) wurde am 01. August 2016 nach ca. 22 Jahre Bauzeit fertig gestellt und in Betrieb genommen.

Bezogen auf ein lokales Koordinatensystem (alle Koordinaten in Meter) startete eine Tunnelbohrmaschine im Punkt $S(187|789|512)$ (Mittelpunkt des Bohrkopfes). Der durchschnittliche tägliche Fortschritt der Maschine kann annähert mit dem Vektor \vec{v} beschrieben werden.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P , an dem sich die Tunnelbohrmaschine am Ende des ersten Arbeitstages befindet.

Bestimmen Sie die Strecke, die die Maschine durchschnittlich pro Tag schafft.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q , an dem sich die Tunnelbohrmaschine am Ende des 5. Arbeitstages befindet.

Lösungen

1. Aufgabe

Ortsvektor zu P und Q aufstellen

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vektor \overrightarrow{PQ} berechnen

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 7-7 \\ -1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. Aufgabe

Ortsvektor zu P aufstellen

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ortsvektor zu $\overrightarrow{OP'}$ berechnen

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \vec{v}$$

$$\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} 2+3 \\ 3-1 \\ -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Koordinaten von P' bestimmen

$$P'(5|2|1)$$

3. Aufgabe

Ortsvektor zu P und Q aufstellen

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vektor \overrightarrow{PQ} berechnen

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ 3+1 \\ -1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Betrag (Länge) des Vektors \vec{PQ} berechnen

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + (-5)^2}$$

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{9 + 16 + 25}$$

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{50} \approx 7,07$$

Der Vektor ist ca. 7,07 LE (Längeneinheiten) lang.

4. Aufgabe

Vektor \vec{PQ} berechnen

$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$$

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ q_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 8-4 \\ -1+1 \\ q_3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ q_3-1 \end{pmatrix}$$

q_3 berechnen, sodass $d = |\vec{PQ}| = 5$

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$5 = \sqrt{4^2 + 0^2 + (q_3 - 1)^2} \quad | \text{quadrieren}$$

$$5^2 = 4^2 + 0^2 + (q_3 - 1)^2 \quad | \text{ausrechnen}$$

$$25 = 16 + (q_3 - 1)^2 \quad | -16$$

$$9 = (q_3 - 1)^2 \quad | \pm \sqrt{\quad}$$

$$\pm \sqrt{9} = q_3 - 1 \quad | \text{ausrechnen}$$

$$\pm 3 = q_3 - 1 \quad | +1$$

$$q_3 = 4 \text{ oder } q_3 = -2$$

Für die fehlende Koordinate q_3 kann 4 oder -2 eingesetzt werden

5. Aufgabe

Koordinaten des Punktes P bestimmen

Ortsvektor zu S aufstellen

$$\vec{OS} = \begin{pmatrix} 187 \\ 789 \\ 512 \end{pmatrix}$$

Ortsvektor zu \vec{OP} berechnen

$$\vec{OP} = \vec{OS} + \vec{v}$$

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 187 \\ 789 \\ 512 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 187 + 12 \\ 789 + 10 \\ 512 + 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 199 \\ 799 \\ 512,5 \end{pmatrix}$$

Koordinaten von P bestimmen

$P(199|799|512,5)$

Nach einem Tag befindet sich die Tunnelbohrmaschine auf der Position $P(199|799|512,5)$

Durchschnittliche Strecke pro Tag bestimmen

Betrag (Länge) des Vektors \vec{v} berechnen

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{12^2 + 10^2 + 0,5^2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{144 + 100 + 0,25}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{244,25} \approx 15,628$$

Die Tunnelbohrmaschine schafft durchschnittlich eine Strecke von ca. 15,63 Meter am Tag.

Koordinaten des Punktes Q nach 5 Tagen bestimmen

Ortsvektor zu S aufstellen (wurde schon im ersten Aufgabenteil bestimmt)

$$\vec{OS} = \begin{pmatrix} 187 \\ 789 \\ 512 \end{pmatrix}$$

Ortsvektor zu \vec{OQ} berechnen

$$\vec{OQ} = \vec{OS} + t \cdot \vec{v}$$

$$\vec{OQ} = \begin{pmatrix} 187 \\ 789 \\ 512 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OQ} = \begin{pmatrix} 187 \\ 789 \\ 512 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \cdot 12 \\ 5 \cdot 10 \\ 5 \cdot 0,5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OQ} = \begin{pmatrix} 187 \\ 789 \\ 512 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 50 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OQ} = \begin{pmatrix} 187 + 60 \\ 789 + 50 \\ 512 + 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 247 \\ 839 \\ 514,5 \end{pmatrix}$$

Koordinaten von Q bestimmen

$Q(247|839|514,5)$

Nach 5 Tagen befindet sich die Tunnelbohrmaschine auf der Position $Q(247|839|514,5)$

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P , an dem sich die Tunnelbohrmaschine am Ende des ersten Arbeitstages befindet.

Bestimmen Sie die Strecke, die die Maschine durchschnittlich pro Tag schafft.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q , an dem sich die Tunnelbohrmaschine am Ende des 5. Arbeitstages befindet.